

Principium Geometricum

Invariância de Fase Toroidal e a Emergência do Limite de Kepler–Newton

Pedro A. Kubitschek Homem de Carvalho

Resumo

Este trabalho parte de uma pergunta simples: será que aquilo que descrevemos como translação e força pode ser a aparência local de uma dinâmica fundamentalmente angular? No Principium Geometricum (PG), investigamos a possibilidade de que a descrição física mais fundamental não comece pela trajetória de um corpo através de um espaço previamente dado, mas por estados de fase, rotação, fechamento e atualização causal.

Introduzimos um estado de fase normalizado

$$\mathbf{q}(\phi) = (\cos \phi, \sin \phi),$$

para o qual $\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 = \omega^2$. Em paralelo, consideramos a geometria de um toroide, cujo volume é $V_T = 2\pi^2 R a^2$. No caso geométrico reduzido $R = a = r$, temos $V_T = 2\pi^2 r^3$. Essas duas estruturas sugerem a quantidade

$$\mathcal{I}_T \equiv \frac{V_T}{2\pi^2} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 = r^3 \omega^2.$$

Propomos investigar a conservação de $\mathcal{I}_T$ para estados orbitais associados à mesma fonte global. Se $\mathcal{I}_T$ é constante, segue diretamente a terceira lei de Kepler e, para a projeção circular, uma aceleração proporcional a r^{-2} . A identificação observacional $\mathcal{I}_T \leftrightarrow GM$ recupera então o limite newtoniano.

O resultado não constitui uma derivação microscópica da gravidade. A conservação de $\mathcal{I}_T$ permanece como hipótese física a ser fundamentada. O objetivo é mostrar, de maneira explícita e falsificável, onde termina a identidade geométrica, onde entra a hipótese do PG e como o limite clássico é recuperado.

1 Introdução

Normalmente aprendemos a pensar uma órbita começando pela translação. Um planeta possui posição, velocidade e aceleração; uma interação central curva sua trajetória. Essa descrição funciona extraordinariamente bem e constitui uma das bases da mecânica clássica.

O Principium Geometricum faz a pergunta no sentido contrário:

e se a translação não for o ponto de partida?

(1)

A hipótese investigada aqui é que uma trajetória observada possa ser a projeção local de uma estrutura mais fundamental de fase. Isso não elimina Kepler ou Newton. Qualquer proposta desse tipo deve recuperar, no domínio apropriado, os resultados já estabelecidos.

Por isso, não começaremos modificando a lei de Newton nem introduzindo uma nova constante gravitacional ajustada aos dados. Começaremos com duas estruturas: fase e geometria toroidal. A pergunta é se elas permitem construir naturalmente a combinação orbital $\omega^2 r^3$.

A terceira lei de Kepler estabelece, para corpos que orbitam a mesma fonte central, a relação $T^2 \propto a^3$ [1, 4]. Na formulação newtoniana de dois corpos, essa relação é associada ao parâmetro gravitacional da fonte [2, 3]. O PG propõe aqui uma leitura geométrica alternativa desse mesmo invariante, sem reivindicar que a correspondência, por si só, prove uma nova dinâmica.

2 Estado de fase

Considere uma fase

$$\phi(t) = \omega t + \phi_0. \quad (2)$$

Definimos o estado normalizado

$$\mathbf{q}(\phi) = (\cos \phi, \sin \phi). \quad (3)$$

Seu módulo é

$$\|\mathbf{q}\|^2 = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1. \quad (4)$$

Derivando,

$$\dot{\mathbf{q}} = \omega(-\sin \phi, \cos \phi), \quad (5)$$

e portanto

$$\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 = \omega^2. \quad (6)$$

Essa identidade é puramente geométrica: uma fase circular normalizada possui velocidade de fase quadrática igual a ω^2 .

3 Relação com o Tempo-do-Tempo

Em formulações anteriores do PG, o Tempo-do-Tempo foi escrito esquematicamente como

$$T(\phi) = \alpha_U \sin \phi + A_P \cos \phi. \quad (7)$$

Neste trabalho não somamos diretamente as duas amplitudes como se sua interpretação física já estivesse resolvida. Em vez disso, tratamos as duas quadraturas como componentes de um estado e normalizamos cada eixo por sua própria amplitude:

$$\mathbf{q}(\phi) = \left(\frac{T_C}{A_P}, \frac{T_O}{\alpha_U} \right) = (\cos \phi, \sin \phi). \quad (8)$$

Assim, a construção usada nas seções seguintes depende da fase normalizada, não de uma identificação dimensional prematura entre A_P e α_U . A interpretação física dessas amplitudes continua sendo parte aberta do programa.

4 Geometria toroidal

O volume de um toroide de raio maior R e raio de seção a é

$$V_T = 2\pi^2 R a^2. \quad (9)$$

Essa expressão pode ser lida como

$$V_T = (2\pi R)(\pi a^2), \quad (10)$$

isto é, o percurso do centro da seção multiplicado pela área da seção.

Para explorar o caso reduzido mais simples, adotamos

$$R = a = r. \quad (11)$$

Então

$$V_T = 2\pi^2 r^3. \quad (12)$$

Definindo

$$w \equiv 2\pi^2, \quad (13)$$

temos

$$\boxed{\frac{V_T}{w} = r^3.} \quad (14)$$

A escolha $R = a = r$ é uma idealização geométrica, não uma consequência já demonstrada da dinâmica orbital. Em um desenvolvimento posterior, R e a deverão ser tratados independentemente e relacionados a observáveis ou a variáveis fundamentais do PG.

5 O candidato a invariante de fase toroidal

Combinando a geometria reduzida com a taxa de fase, definimos

$$\boxed{\mathcal{I}_T \equiv \frac{V_T}{2\pi^2} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2.} \quad (15)$$

No caso reduzido,

$$\boxed{\mathcal{I}_T = r^3 \omega^2.} \quad (16)$$

Sua dimensão é

$$[\mathcal{I}_T] = L^3 T^{-2}, \quad (17)$$

ou, no SI,

$$[\mathcal{I}_T] = \text{m}^3 \text{s}^{-2}. \quad (18)$$

Essa é a mesma dimensão de um parâmetro gravitacional GM . Essa coincidência dimensional é necessária para uma futura correspondência, mas não é suficiente para estabelecer identidade física.

6 Hipótese de invariância

A hipótese central deste trabalho é:

Para estados orbitais associados à mesma fonte global, o invariante de fase toroidal $\mathcal{I}_T$ é conservado no limite orbital considerado.

Matematicamente,

$$\boxed{\dot{\mathcal{I}}_T = 0,} \quad (19)$$

ou

$$\boxed{\omega^2 r^3 = \text{constante.}} \quad (20)$$

É essencial separar duas afirmações:

- (i) $\mathcal{I}_T = r^3 \omega^2$ decorre da definição geométrica adotada;
- (ii) $\dot{\mathcal{I}}_T = 0$ é uma hipótese física do PG e ainda precisa ser derivada de uma dinâmica mais fundamental.

Essa distinção evita transformar a recuperação de uma lei conhecida em uma falsa demonstração de sua origem.

7 Recuperação da terceira lei de Kepler

Como

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (21)$$

a invariância proposta implica

$$\frac{4\pi^2 r^3}{T^2} = \mathcal{I}_T. \quad (22)$$

Logo,

$$\boxed{T^2 = \frac{4\pi^2}{\mathcal{I}_T} r^3}, \quad (23)$$

e, para uma fonte comum,

$$\boxed{T^2 \propto r^3}. \quad (24)$$

Essa é a estrutura da terceira lei de Kepler. Aqui ela funciona como teste de recuperação: a novidade proposta não é a relação orbital, mas a interpretação de sua constante como possível invariante de fase toroidal.

8 Emergência do limite inverso do quadrado

Para uma projeção circular,

$$v = \omega r \quad (25)$$

e

$$a_r = \omega^2 r. \quad (26)$$

Da hipótese

$$\omega^2 r^3 = \mathcal{I}_T, \quad (27)$$

temos

$$\omega^2 = \frac{\mathcal{I}_T}{r^3}. \quad (28)$$

Assim,

$$\boxed{a_r = \frac{\mathcal{I}_T}{r^2}}. \quad (29)$$

Para uma massa de teste m ,

$$\boxed{F = ma_r = \frac{m\mathcal{I}_T}{r^2}}. \quad (30)$$

A correspondência com Newton é obtida se, no limite clássico,

$$\boxed{\mathcal{I}_T \longleftrightarrow GM}. \quad (31)$$

Então

$$F \longrightarrow \frac{GMm}{r^2}. \quad (32)$$

O fator r^{-2} não foi inserido na definição de $\mathcal{I}_T$; ele aparece algebricamente quando a invariância $r^3\omega^2 = \text{constante}$ é combinada com a aceleração circular $\omega^2 r$. Entretanto, como a conservação de $\mathcal{I}_T$ ainda é postulada, este resultado deve ser descrito como uma recuperação condicionada, e não como uma derivação completa da gravitação.

9 Teste de recuperação no Sistema Solar

A relação pode ser verificada usando apenas escalas orbitais observadas. A Tabela 1 usa valores representativos de semieixo maior e período orbital publicados em materiais da NASA [5, 6]. Para cada planeta calculamos

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \mathcal{I}_T = \omega^2 r^3. \quad (33)$$

Tabela 1: Teste de recuperação de $\mathcal{I}_T$ no Sistema Solar. Os valores são arredondados; a coluna final deve ser entendida como verificação da estrutura de Kepler, não como evidência independente do PG.

Planeta	r (AU)	T (anos)	$\mathcal{I}_T$ ($10^{20} \text{ m}^3 \text{s}^{-2}$)
Mercúrio	0,3871	0,2408	$\sim 1,327$
Vênus	0,7233	0,615	$\sim 1,327$
Terra	1,0000	1,000	$\sim 1,327$
Marte	1,5235	1,88	$\sim 1,327$
Júpiter	5,2043	11,88	$\sim 1,327$
Saturno	9,5824	29,68	$\sim 1,327$
Urano	19,2009	84,20	$\sim 1,327$
Netuno	30,0472	164,82	$\sim 1,327$

O valor comum é da ordem de

$$\boxed{\mathcal{I}_{T,\odot} \simeq 1,327 \times 10^{20} \text{ m}^3 \text{s}^{-2}}. \quad (34)$$

A astronomia convencional descreve a mesma escala pelo parâmetro gravitacional heliocêntrico $GM_\odot$. A IAU recomenda trabalhar diretamente com parâmetros gravitacionais GM em várias aplicações astronômicas e distingue essa grandeza da massa expressa em quilogramas, que requer uma escolha experimental para G [7].

Portanto, o resultado numérico confirma que a construção recupera o invariante orbital já conhecido. Ele não distingue, sozinho, o PG da mecânica convencional.

10 O que foi demonstrado e o que permanece hipótese

Para evitar circularidade, resumimos o status lógico do argumento.

Identities matemáticas

São consequências diretas das definições:

$$\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 = \omega^2, \quad (35)$$

$$V_T = 2\pi^2 r^3 \quad (R = a = r), \quad (36)$$

$$\mathcal{I}_T = r^3 \omega^2. \quad (37)$$

Resultado observacional conhecido

Para órbitas aproximadamente keplerianas em torno da mesma fonte,

$$r^3 \omega^2 \simeq \text{constante}. \quad (38)$$

Hipótese nova do PG

O PG interpreta essa constância como conservação de uma quantidade geométrica de fase:

$$\boxed{\frac{V_T}{2\pi^2} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 = \text{constante.}} \quad (39)$$

Questão ainda não resolvida

Ainda falta obter a conservação acima de uma ação, equação de movimento, simetria ou princípio dinâmico independente. Sem esse passo, a construção é uma reinterpretação geométrica consistente do invariante de Kepler, e não uma teoria alternativa completa da gravidade.

11 Uma possível rota dinâmica

A próxima etapa natural é procurar uma ação cuja estrutura produza a conservação de $\mathcal{I}_T$. Esquematicamente, consideramos um funcional da forma

$$S_{\text{PG}} = \int \mathcal{L}(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}) dt, \quad (40)$$

em que a fase ϕ é tratada como uma coordenada fundamental.

Em formulações anteriores do Principium Geometricum, o Tempo-do-Tempo foi descrito por um setor oscilatório contendo um termo cinético quadrático em sua taxa de variação. Isso sugere interpretar o movimento de fase como um campo distribuído sobre a geometria toroidal.

Uma forma efetiva mínima para o setor cinético de fase é então

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{\tau_U}{2} \frac{V_T(r)}{2\pi^2} \dot{\phi}^2, \quad (41)$$

onde τ_U representa uma tensão geométrica efetiva associada ao campo de fase.

Para o toroide reduzido,

$$V_T = 2\pi^2 r^3, \quad (42)$$

de modo que

$$\boxed{\mathcal{L}_\phi = \frac{\tau_U}{2} r^3 \dot{\phi}^2 = \frac{\tau_U}{2} \mathcal{I}_T.} \quad (43)$$

O momento conjugado à fase é

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}_\phi}{\partial \dot{\phi}} = \tau_U r^3 \dot{\phi}. \quad (44)$$

Se ϕ for uma coordenada cíclica, a equação de Euler–Lagrange implica

$$\dot{p}_\phi = 0, \quad (45)$$

ou seja,

$$r^3 \dot{\phi} = \text{constante}, \quad (46)$$

para τ_U constante.

Entretanto, essa conservação não é ainda idêntica à invariância proposta anteriormente,

$$\mathcal{I}_T = r^3 \dot{\phi}^2 = \text{constante.} \quad (47)$$

A quantidade energética associada ao setor de fase é

$$E_\phi = \dot{\phi} p_\phi - \mathcal{L}_\phi, \quad (48)$$

resultando em

$$E_\phi = \frac{\tau_U}{2} r^3 \dot{\phi}^2 = \frac{\tau_U}{2} \mathcal{I}_T. \quad (49)$$

Assim, se o regime orbital considerado corresponder a um estado em que o conteúdo energético do movimento de fase seja conservado separadamente, e se τ_U permanecer constante, então

$$\dot{E}_\phi = 0 \quad (50)$$

implica

$$\dot{\mathcal{I}}_T = 0. \quad (51)$$

Essa construção fornece uma possível origem dinâmica para a invariância de fase toroidal. Contudo, ela ainda não constitui uma derivação completa. Em uma dinâmica geral, os setores radial, de fase e de interação podem trocar energia entre si. Uma ação completa deverá determinar em quais condições E_ϕ permanece conservado, ou se existe uma simetria adicional capaz de produzir diretamente a conservação de $\mathcal{I}_T$.

A questão dinâmica central do PG pode, portanto, ser formulada como:

$$\text{qual simetria ou estrutura dinâmica conserva } \frac{V_T}{2\pi^2} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2? \quad (52)$$

12 Relação com causalidade e luz

O presente artigo isola deliberadamente o problema orbital. O PG mais amplo também investiga propagação causal, orientação do observador e a fase acumulada durante um intervalo r/c .

Essas estruturas podem ser escritas, por exemplo, como

$$\Delta\phi_c = \omega \frac{r}{c}. \quad (53)$$

Contudo, não usamos essa relação para ajustar $\mathcal{I}_T$ neste trabalho. Isso é proposital. Misturar a recuperação orbital com fatores causais ainda não derivados tornaria difícil distinguir previsão de ajuste.

A conexão entre $\mathcal{I}_T$, propagação luminosa e o formalismo completo do Tempo-do-Tempo deve ser tratada como etapa posterior.

13 Falsificabilidade e limites

A proposta deve ser modificada ou rejeitada como fundamento físico se ocorrer qualquer uma das seguintes situações:

1. não for possível derivar a conservação de $\mathcal{I}_T$ de uma dinâmica independente;
2. a geometria toroidal não produzir nenhum observável distinto de uma simples reparametrização de Kepler;
3. a generalização para órbitas elípticas, sistemas de dois corpos e perturbações falhar em recuperar os limites conhecidos;
4. a identificação $R = a = r$ revelar-se apenas uma escolha algébrica sem justificativa geométrica;

5. qualquer previsão nova do PG for excluída experimentalmente.

Também é importante observar que a tabela planetária não constitui teste discriminante, pois a constância de $\omega^2 a^3$ é precisamente a estrutura kepleriana conhecida. Um teste genuinamente novo exigirá uma previsão que não tenha sido usada para definir ou ajustar $\mathcal{I}_T$.

14 Discussão

A construção sugere uma inversão conceitual simples. Em vez de começar com uma força inversamente proporcional ao quadrado da distância e então obter uma órbita, começamos com um estado angular e perguntamos qual quantidade geométrica deve permanecer invariável para que a projeção orbital seja estável.

No caso reduzido estudado,

$$\boxed{\mathcal{I}_T = \frac{V_T}{2\pi^2} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 = r^3 \omega^2.} \quad (54)$$

Se essa quantidade é conservada, a estrutura de Kepler e o limite $1/r^2$ seguem imediatamente.

Isso desloca o problema. A pergunta deixa de ser apenas “por que a força cai como $1/r^2$?” e passa a incluir:

Por que uma estrutura global conservaria volume toroidal reduzido multiplicado pela taxa quadrática de fase?

Responder a essa pergunta é o passo necessário para transformar a correspondência apresentada aqui em uma teoria dinâmica.

15 Conclusão

Este trabalho apresentou uma construção mínima do Principium Geometricum baseada em fase e geometria toroidal.

A fase normalizada satisfaz

$$\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 = \omega^2. \quad (55)$$

O toroide reduzido satisfaz

$$\frac{V_T}{2\pi^2} = r^3. \quad (56)$$

A combinação define

$$\boxed{\mathcal{I}_T = r^3 \omega^2.} \quad (57)$$

Assumindo sua conservação para uma fonte global comum, recuperamos

$$T^2 \propto r^3 \quad (58)$$

e

$$a_r \propto \frac{1}{r^2}. \quad (59)$$

No limite clássico,

$$\mathcal{I}_T \leftrightarrow GM. \quad (60)$$

A contribuição proposta é, portanto, uma interpretação geométrica candidata para o invariante orbital, e não uma substituição já concluída da gravitação newtoniana ou relativística.

O próximo requisito matemático é claro:

$$\boxed{\text{derivar } \dot{\mathcal{I}}_T = 0 \text{ de uma dinâmica ou simetria independente.}} \quad (61)$$

Somente depois dessa etapa será possível decidir se a invariância de fase toroidal representa uma estrutura física nova ou apenas uma maneira alternativa de escrever a dinâmica orbital conhecida.

Referências

- [1] J. Kepler, *Astronomia Nova*, Praga, 1609.
- [2] I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Londres, 1687.
- [3] R. R. Bate, D. D. Mueller e J. E. White, *Fundamentals of Astrodynamics*, Dover Publications, 1971.
- [4] NASA/GSFC, “Kepler and His Laws”, Stargazers to Starships. Disponível em: <https://pwg.gsfc.nasa.gov/stargaze/Skeplaws.htm>.
- [5] NASA, *Introduction to Orbital Mechanics*, material técnico de dinâmica orbital, NASA Technical Reports Server.
- [6] NASA Science, “About the Planets” e materiais de referência do Sistema Solar. Disponível em: <https://science.nasa.gov/solar-system/planets/>.
- [7] International Astronomical Union, Resolution B3 (2015), Recommended Nominal Conversion Constants for Selected Solar and Planetary Properties.