四角形の新面積公式

高山　凌羽

要旨

本稿では、特定の四角形の面積を向かい合う二辺の長さと四つの内角のみを用いて表す明示公式を導出する。公式は既知の幾何学的関係式を基礎とし、式簡略および変形によって整理される。さらに、数式上の適用条件を明確化し、その幾何学的背景を整理する。これにより、凸四角形および凹四角形に加え、特定の交差四角形への適用を示す。

導入

$a=AB, b=BC, c=CD$ および$d=DA$ とする。平面上の 4 点を順に結んで構成される閉じた四角形 ABCD の面積（図 1 において、既知の向かい合う二辺の長さを AB および CD とし、四つの内角を∠A、∠B、∠C および∠D とする）：

$S=\frac{a^2}{2(\cot A+\cot B)}+\frac{c^2}{2(\cot C+\cot D)}=\frac{a^2\sin A\sin B}{2\sin(A+B)}+\frac{c^2\sin C\sin D}{2\sin(C+D)}$。

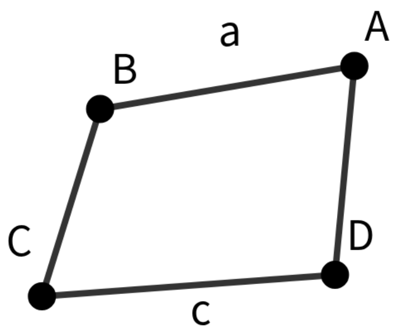


図 1

本公式の適用範囲は、$A+B\neq\pi$かつ$C+D\neq\pi$である四角形。この中には、凸四角形と凹四角形（単純四角形）に加え、辺 BC と辺 DA が交差する全ての交差四角形も含まれる。ただし、本稿では未証明であるので、辺 AB と辺 CD が交差する交差四角形を同公式の適用外とする。

定義と既知の結果と作図可能性

定義 1（作図可能）
本稿では、平面上の点、直線、および円が「作図可能」であるとは、与えられた初期点集合

から、目盛りのない定規とコンパスを用いた以下の3つの操作を有限回繰り返すことで得られることを指す。
1. 与えられた相異なる2点を通る直線を引く。
2. 与えられた1点を中心とし、（中心とする点とは相異なる）1点を通る円を描く。
3. 円と直線のいずれかの少なくとも1つからなる相異なる2図形同士の交点を新たな点として抽出する。

n 角形の正弦定理

平面上の相異なる n 個の点 $P_1, P_2, \dots, P_n$を反時計回りにとり、線分 $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_nP_1$により単純閉曲線を構成するとする。

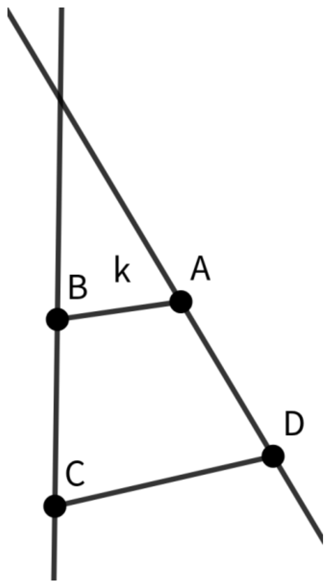
この閉路を 単純 n 角形とみなす。$P_0 = P_n$および$P_{n+1} = P_1$とする。

各辺の長さを$a_i = P_{i-1}P_i$、

各内角を$A_i = \angle P_{i-1}P_iP_{i+1}$と定める。

このとき、次の関係式が成立する：$\sum_{i=2}^{n}(-1)^i a_i \sin\left(\sum_{k=1}^{i-1} A_k\right) = 0$…※

定義 2（同側内角）
線分 k が相異なる直線 BC と直線 DA を横切るとき、（それらの二直線のそれぞれと線分 k の交点付近にあり、かつ）それらの二直線の内側にあり、かつ截線 k の同じ側にある2つの角を同側内角と定義する。本定義の下で、相異なる任意の二直線に対し、截線を引くことで同側内角を定規のみで構成できる。



定義 3とその作図可能性（平行）
直線 l に対して直線 m 上の任意の点から引いた垂直な線分の長さが一定であり、かつ相異なる直線 l と直線 m は平行であると定義する。文献[1]では、本定義の下で、任意の直線 q に対し、直線 q 上にない1点を通る1つの平行線が定規とコンパスで作図可能であることが示されている。

定義 4（台形）
少なくとも一組の向かい合う二辺が平行である単純四角形を台形と定義する。

論理的な証明と適用範囲

$a=AB, b=BC, c=CD$および$d=DA$とする。1)凸四角形や凹四角形の全ての場合。
高山の公式の適用範囲外において、値が未定義となる図形（以下、「当該図形」と述べて省略する）の条件式は、(i)$\cot A+\cot B=0$または、$\cot C+\cot D=0$。
この一般解は、$A=-B+s\pi$または、$C=-D+t\pi$（sとtは整数）...*。凸四角形や凹四角形の全ての場合、次の 4 つの条件を満たす。:
全ての内角の大きさA,B,C,Dは0より大きく、かつ2πより小さい...*
$A+B+C+D=2\pi$...*（それを(ii)とする）
よって、(iii)$0<A+B<2\pi$...*かつ$0<C+D<2\pi$...*。
以上の、A,B,C,Dに対する*で示した 5 つの条件を連立して解くと、解は、$s=t=1$。このとき、$A=-B+\pi$または、$C=-D+\pi$。
つまり、(iv)$A+B=\pi$または、$C+D=\pi$。
これは(ii)より、$A+B=C+D=\pi$であることと同値。
これは定義 2（それにおいて截線 k を線分 AB とすると、∠A と∠B は同側内角をなす）より、凸四角形や凹四角形の全ての場合、直線 BC と直線 DA に線分 AB が交わり、同側内角の和が 2 直角であることと同値。よって、定義 3 と文献 [1] 命題 28 より、当該図形は、定義 2 および定義 3 に基づき作図可能であるので、同図形の存在が示され、辺 BC と辺 DA が平行な全ての台形である。このような台形のそれぞれはその 4 つの内角の大きさA,B,C,Dが条件式 (i)を満たすので、適する 。

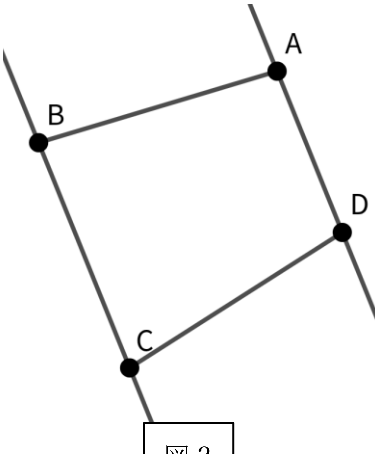


図 2

よって、(iv)であることは、当該図形であることと同値。よって、任意の 2 つの命題が同値であるならば、それらの否定が同値であるので、 (iv)が成立しないことは、当該図形でないことと同値。よって以下、(iv)が成立しない場合であるとする。
ド・モルガンの法則より、(iv)が成立しないことは、(v)$A+B\neq\pi$かつ$C+D\neq\pi$であることと同値。(v)であることは当該図形でないことと同値であり、 (v)が成立しないことは当該図形であることと同値である。よって、凸四角形や凹四角形の全ての場合、本公式の適用範囲は(v)である四角形であることが示された。よって、与えられた場合における凸四角形や凹四角形の全てでは、 (iii)かつ(v)、つまり、

$$(0<A+B<\pi\cup\pi<A+B<2\pi)\cap(0<C+D<\pi\cup\pi<C+D<2\pi)$$

が成立するので、$\sin(A+B)\neq 0$（それを(vi)とする）かつ$\sin(C+D)\neq 0$。
平面上の 4 点を順に結んで構成される閉じた単純四角形$P_1P_2P_3P_4$においては、文献［2］定理 10 の ※で示した n 角形の正弦定理 P.83 に$n=4$を代入すると、
(vii)$a_2\sin A_1-a_3\sin(A_1+A_2)+a_4\sin(A_1+A_2+A_3)=0$。
平面上の 4 点を順に結んで構成される閉じた四角形 ABCD においては、(vii)に
$a_1=d, a_2=a, a_3=b, a_4=c, A_1=A, A_2=B, A_3=C$および$A_4=D$を代入してよいので、
$a\sin A-b\sin(A+B)+c\sin(A+B+C)=0$。これを$A_1+A_2+A_3+A_4=A+B+C+D=2\pi$および
$\sin(A_1+A_2+A_3)=\sin(2\pi-A_4)=-\sin(A_4)=-\sin D$より、変形すると、$a\sin A-b\sin(A+B)-c\sin D=0$。よって、(vi)より、$b=\frac{a\sin A-c\sin D}{\sin(A+B)}$。　同様にして、(vii)に
$a_1=b, a_2=c, a_3=d, a_4=a, A_1=C, A_2=D, A_3=A$および$A_4=B$を代入すると、
$c\sin C-d\sin(C+D)+a\sin(C+D+A)=0$。
これを変形すると、$c\sin C-d\sin(C+D)-a\sin B=0$。
これを$\sin(C+D)=\sin\big(2\pi-(A+B)\big)=-\sin(A+B)$より、変形すると、$c\sin C+d\sin(A+B)-a\sin B=0$。よって、(vi)より、$d=\frac{a\sin B-c\sin C}{\sin(A+B)}$。
三角形 XYZ（その面積を△XYZ とする）の、二辺夾角が既知であるときの面積式（図 3 において、既知の二辺を XY および YZ とし、それらの夾角を∠Y とする）：$\triangle XYZ=\frac{1}{2}XY\cdot YZ\sin Y$。

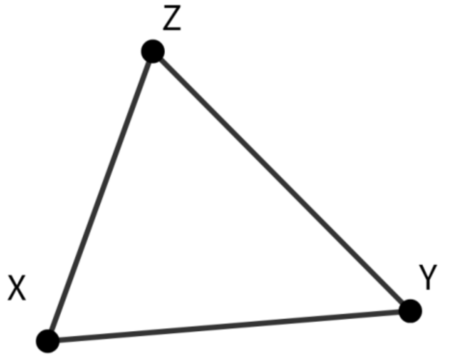
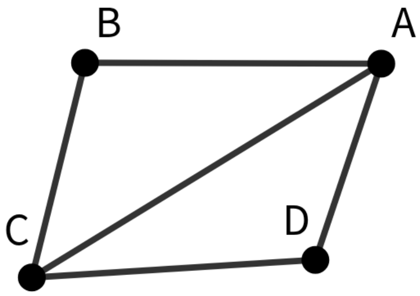


図3

uおよびvが実数のとき、既知である三角関数の恒等式：$\cot u+\cot v=\frac{\sin(u+v)}{\sin u\sin v}$
以上より、平面上の 4 点を順に結んで構成される閉じた四角形 ABCD の面積：
$S=\frac{1}{2}ab\sin B+\frac{1}{2}cd\sin D=\frac{1}{2}a\sin B\frac{a\sin A-c\sin D}{\sin(A+B)}+\frac{1}{2}c\sin D\frac{a\sin B-c\sin C}{\sin(A+B)}=\frac{a^2\sin A\sin B-c^2\sin C\sin D}{2\sin(A+B)}=\frac{a^2\sin A\sin B}{2\sin(A+B)}+\frac{c^2\sin C\sin D}{2\sin(C+D)}=\frac{a^2}{2(\cot A+\cot B)}+\frac{c^2}{2(\cot C+\cot D)}$。

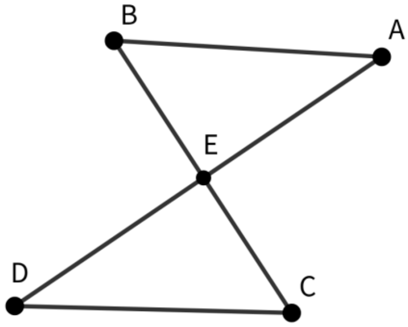


2) 辺 BC と辺 DA が交差する（辺 BC と辺 DA の交点を E とする）全ての交差四角形の場合。
三角形 XYZ（その面積を△XYZ とする）の、一辺両端角が既知であるときの面積式（図 3 において、既知の一辺を XY とし、その両端角を∠X および∠Y とする）：

$\triangle XYZ = \frac{XY^2}{2(\cot X + \cot Y)}$。

よって、平面上の 4 点を順に結んで構成される閉じた四角形 ABCD の面積：

$S = \triangle ABE + \triangle CDE = \frac{a^2}{2(\cot A + \cot B)} + \frac{c^2}{2(\cot C + \cot D)}$。



よって、辺 AB と辺 CD が交差する交差四角形の場合を除外すると、本公式と所定の適用範囲が示された。

参考にした文献

[1]「原論」Euclid　著
[2]「正弦定理・余弦定理・面積公式に関する教材開発：n 角形への拡張」四之宮佳彦、熊倉啓之　著　静岡大学紀要
URL: https://shizuoka.repo.nii.ac.jp/records/12150